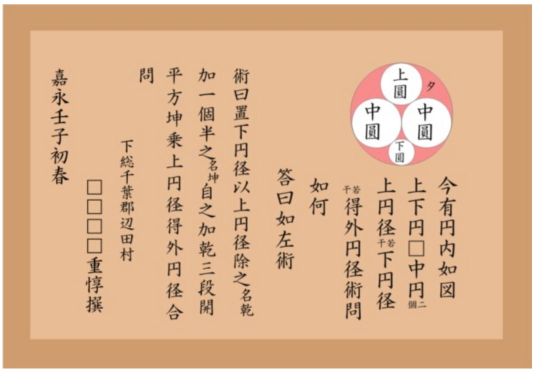
延命寺と天地明察問題の略解　木下　宙　2016-8-9



今有円内如図
上下円□中円二個
上円径干若下円径干若
得外円径術問
如何
答曰如左術
術曰置下円径以上円径除之名乾
加一個半之名坤自之加乾三段開
平方坤乗上円径得外円径合
問
下総千葉郡辺田村
□□□□重惇撰
嘉永壬子初春

問題

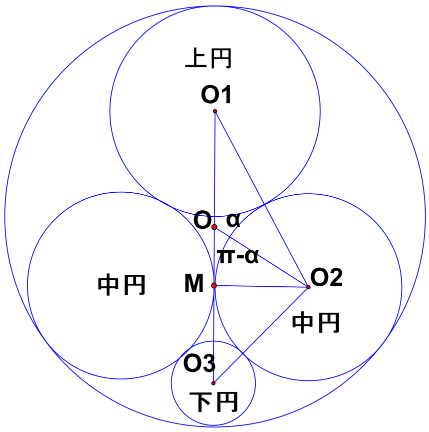
上円径と下円径の与えて外円径を求めよ。

術文の直訳

乾 = 下円径/上円径、坤 = (乾 + 1)/2 とおくと外円径は

$$外円径 = (\sqrt{坤^2 + 3\,乾} + 坤) \times 上円径$$

解法 A：三平方の定理を用いる



上円 (O_1)、中円 (O_2)、下円 (O_3)、外円 (O) の半径を a, b, c, R、２中円の接点を M とする。直角三角形 OMO_2 において $OM^2 = OO_2^2 - MO_2 = (R-b)^2 - b^2 = R^2 - 2Rb$, 同様にして $O_1M = \sqrt{a^2 * 2ab}, O_3M = \sqrt{c^2 + 2cb}$ である。$O_1O = R - a = O_1M - OM$ であるから

$$R - a = \sqrt{a^2 + 2ab} - \sqrt{R^2 - 2Rb} \quad (1)$$

同様にして

$$R - c = \sqrt{c^2 + 2cb} + \sqrt{R^2 - 2Rb} \quad (2)$$

(1),(2) を 2 回平方することによって有理化する：

$$a^2b + 4a^2R + 2abR - 4aR^2 + bR^2 = 0, \quad (3)$$

$$c^2b + 4c^2R + 2cbR - 4cR^2 + bR^2 = 0. \quad (4)$$

式 (3),(4) は本問における 2 未知数 R, b についての連立方程式である。(3) より

$$b = 4aR(R-a)/(R+a)^2, \quad (5)$$

これを (4) へ代入して R についての方程式を導く：

$$R^2 - (a+c)R - 3ac = 0. \quad (6)$$

この方程式の正根は

$$R = \frac{1}{2}(a + c + \sqrt{a^2 + 14ac + c^2}). \quad (7)$$

参考
中円の半径 b は (7) を (5) を代入して求まる：

$$b = 12ac/(2a + 2c + \sqrt{a^2 + 14ac + c^2}) \tag{8}$$

解法 B：余弦定理を用いた解法

三角形 OO_1O_2, OO_2O_3 に余弦定理（算法助術の公式２０）を適用する：

$$(a+b)^2 = (R-a)^2 + (R-b)^2 - 2(R-a)(R-b)\cos\alpha, \tag{9}$$

$$(b+c)^2 = (R-b)^2 + (R-c)^2 + 2(R-b)(R-c)\cos\alpha. \tag{10}$$

(9),(10) より α を消去し、b を R, a, c で表す：

$$b = (R-a)(R-c)R/(R^2 - ac). \tag{11}$$

$O_1O_3 = O_1O + OO_3 = 2R - a - c$ であり、また $O_1O_3 = O_1M + MO_3 = \sqrt{a^2 + 2ab} + \sqrt{c^2 + 2bc}$ であるから

$$2R - a - c = \sqrt{a^2 + 2ab} + \sqrt{c^2 + 2bc} \tag{12}$$

(12) を有理化して R, a, b, c の関係式を導き、式 (11) を代入して R についての方程式を求める（この計算は単純であるが面倒）:

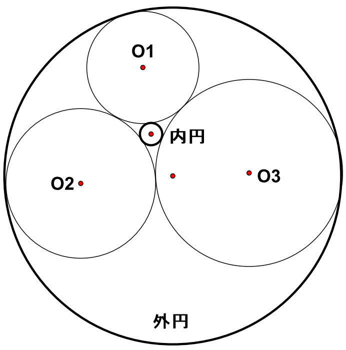
$$R^2 - (a+c)R - 3ac = 0. \tag{13}$$

これより

$$R = \frac{1}{2}(a + c + \sqrt{a^2 + 14ac + c^2}) \tag{14}$$

解法 C：円内 3 円術（算法助術の公式５５）を用いた解法

円内 3 円術



3 円 $O_1(r_1), O_2(r_2), O_3(r_3)$ に内接する外円 $O(R)$ に次の関係がある：

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{R}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{R^2}\right). \tag{15}$$

注 1)R が負のとき 3 円は内円に外接する。
注２）デカルトの 4 円定理とも呼ばれている。

上円、中円、下円、外円の半径を a, b, c, R とおく。上円、中円、外円に円内 3 円術を適用する:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{R}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{R^2}\right). \tag{16}$$

これより

$$b(R+a)^2 = 4aR(R-a). \tag{17}$$

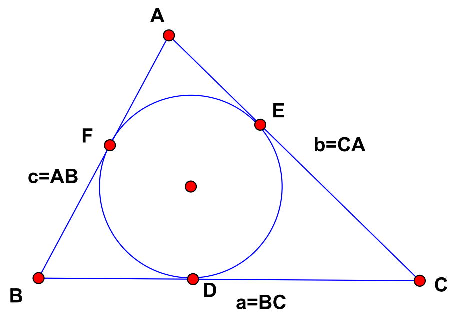
同様に下円、中円、外円に円内３円術を適用して

$$b(R+c)^2 = 4cR(R-c). \tag{18}$$

(17),(18) より b を消去して R についての方程式を求める：

$$R^2 - (a+c)R - 3ac = 0. \tag{19}$$

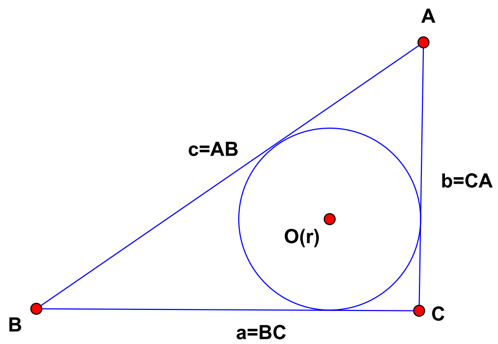
これは解 A で導出した (7) と同じである。



レンマ１

三角形 ABC の内接円と 3 辺の接点を D,E,F とすると、

$$AF = AE = (b+c-a)/2,$$
$$BD = BF = (c+a-b)/2,$$
$$CE = CD = (a+b-c)/2.$$



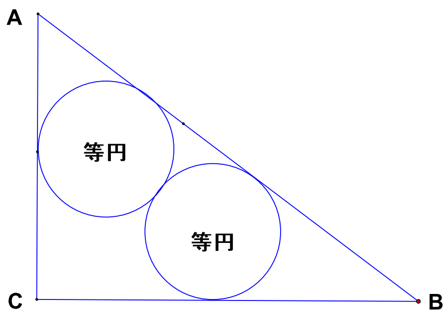
レンマ２

直角三角形 ABC の内接円半径 r は

$$\begin{aligned} r &= \frac{ab}{a+b+c} \\ &= \frac{1}{2}(a+b-c) \end{aligned}$$

である。

天地明察の問題



問題

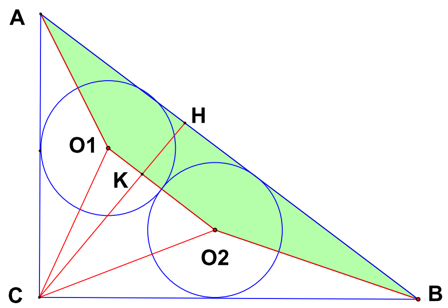
直角三角形ＡＢＣに等円２個が入っている。

AC＝９，BC＝１２のとき等円直径を求めよ。

直角三角形 ABC の辺長を $BC = a, CA = b, AB = c$、等円半径を r とする。ここで多角形 $P_1P_2 \cdots P_n$ の面積を $S(P_1P_2 \cdots P_n)$ と表すことにする。
「天地明察」９７頁に、この算額の奉納者である村瀬義益の解として

$$r = \frac{abc}{(a+b)(a+b+c)} \qquad (**)$$

が与えられている。
注　以下の解法B,C,Eは井坂誠司氏のホームページ(http://homepage3.nifty.com/imura)の「算額の問題に挑戦」より。解法A,Fは奇想庵氏のホームページ (http://kiten. blog. ocn. ne. jp/ kisouan/) の 2010 年 3 月 11 日の記事を利用した。



解法 A：面積を利用

$S(ABC) = ab/2, S(O_1AC) = br/2, S(O_2CB) = ar/2, S(O_1O_2BA) = (2r+c)r/2.$
頂点 C から AB へ下ろした垂線の足を H とすると $S(ABC) = CH * c/2$ であるから $CH = ab/c$ である。

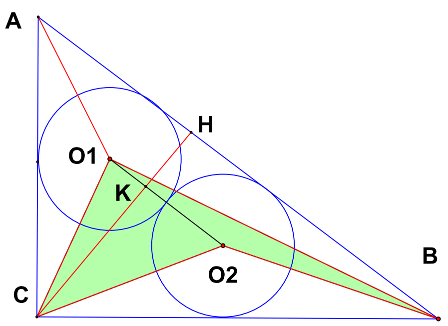
$S(CO_2O_1) = CK * O_1O_2/2 = (CH - KH)r = (ab/c - r)r.$
三角形 ABC の面積は上記のように 4 分割した面積の総和である：$ab/2 = ar/2 + br/2 + (2r+c)r/2 + (ab/c - r)r$, これを展開して

$$ab = (a+b+c+2ab/c)r. \qquad (20)$$

これより $c^2 = a^2 + b^2$ であることを利用して

$$r = \frac{abc}{(a+b)c + c^2 + 2ab} = \frac{abc}{(a+b)(a+b+c)}$$

となり、村瀬の解 (**) と一致する。



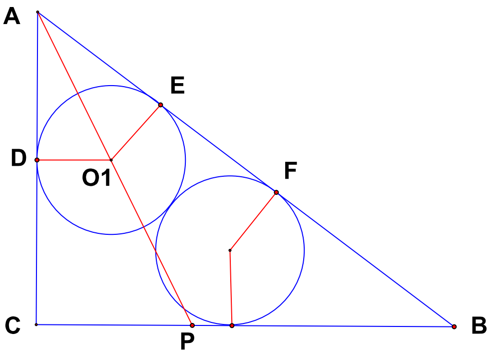
解法 B：面積を利用

$S(ABC) = ab/2, S(O_1AC) = br/2, S(O_2CB) = ar/2, S(O_1AB) = cr/2.$
頂点 C から AB へ下ろした垂線の足を H とすると $S(ABC) = CH * c/2$ であるから $CH = ab/c$ である。

$S(CO_1O_2) + S(BO_1O_2) = CK * O_1O_2/2 + HK * O_1O_2/2 = (CK + KH)r = CH * r = abr/c.$
三角形 ABC の面積は上記のように５分割した三角形の面積の総和である：

$$ab = (a+b+c+2ab/c)r.$$

これは解法 A の式 (20) と同じである。



解法 C：角の２等分線による比の移動をを利用

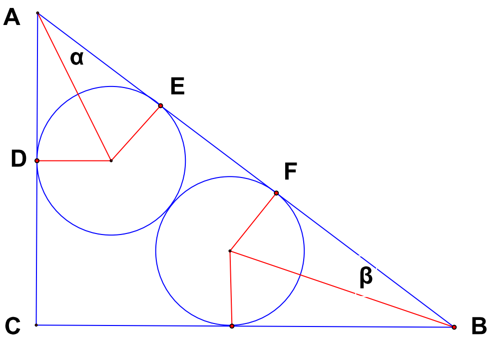
角 A の２等分線と辺 BC との交点を P とする。$CP : PB = AC : AB = b : c$ であるから $CP = ab/(b+c)$ であり、$AC : CP = (b+c) : a$ となる。三角形 ADO_1 と ACP は相似であるので、$AD : DO_1 = AC : CP = (b+c) : a$、

従って $AD = (b+c)r/a$ となり、$AE = AD = (b+c)r/a$ である。同様に $BF = (a+c)r/b$。$AB = AE + EF + BF$ に上記の関係を代入する：

$$((b+c)/a + 2 + (a+c)/b)r = c$$

. これより

$$r = \frac{abc}{(a+b)(a+b+c)}$$



解法 D：三角関数を利用

$\angle A = 2\alpha$ とおくと $\tan 2\alpha = a/b = 2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$. $u = \tan\alpha$ とおくと上式は $au^2 + 2bu - a = 0$ となり、これを u について解く：$u = (-b \pm \sqrt{a^2+b^2})/a$。$u$ は正であるから $\tan\alpha = (c-b)/a$ である。これより $AE = r/\tan\alpha = ar/(c-b)$ である。同様にして $BF = br/(c-a)$.

この２式を $AB = AE + EF + BF$ へ代入する：

$$(a/(c-b) + 2 + b/(c-a))r = c.$$

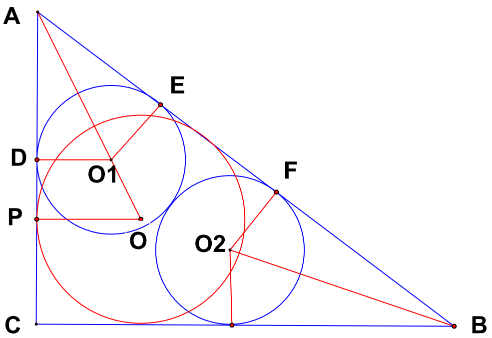
従って

$$r = \frac{(c-a)(c-b)}{c^2 - (a+b)c + 2ab} = \frac{(c-a)(c-b)}{(a+b)(a+b-c)}.$$

この結果は (**) 表現と異なる。しかし２つの表現の差をとると

$$\frac{(c-a)(c-b)}{(a+b)(a+b-c)} - \frac{abc}{(a+b)(a+b+c)} = \frac{c^2(c^2-a^2-b^2)}{(a+b)(a+b-c)(a+b+c)} = 0$$

となり、等価であることがわかる。



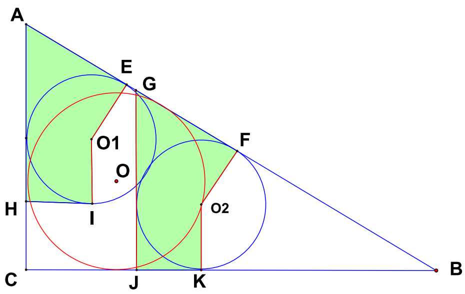
解法 E：直角三角形 ABC の内接円を利用

直角三角形 ABC の内接円半径を R、中心を O、辺 AC との接点を P とする。三角形 ADO_1 と APO は相似なので $AD : DO_1 = AP : PO$. よって $AD : r = b - R : R$ であるから $AD = (b - R)r/R$ である。

従って $AE = AD = (b - R)r/R$ である。同様に $BF = (a - R)r/R$。この 2 式を $AE + EF + BF = AC$ へ代入する：

$$(\frac{b-R}{R} + 2 + \frac{a-R}{R})r = c \text{ なので } (a+b)r = Rc$$

. レンマ 2 を用いて等円半径は $r = abc/((a+b)(a+b+c))$ となる。



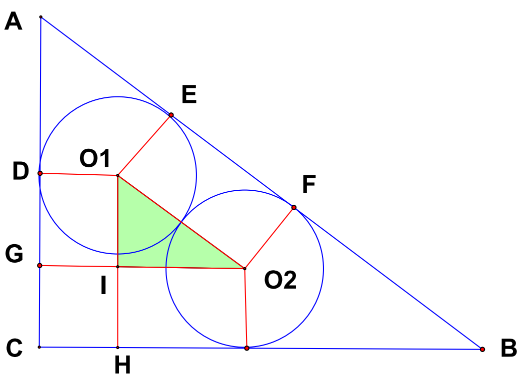
解法 F：相似を利用

AC に平行で円 O_2 に接する線分を GJ とする。2 つの 5 角形 $AHIO_1E, GJKO_2F$ の対応する辺はすべて平行で、$O_1I = O_2K = r$ であるから、この 2 つの 5 角形は合同である。従って $AE = GF$。さらに $GB = GF + FB = AE + FB = AB - EF = c - 2r$ である。

2 つの三角形 BGJ と BAC は相似であるので、この 2 つの三角形の内接円の半径 r, R の比は 2 つの三角形の辺の比に等しい。よって $r : R = BG : BA = c - 2r : c$ より $cr = R(c - 2r)$ であるから

$$r = \frac{cR}{c + 2R}$$

である。レンマ 2 の 1 番目の表現を分子、2 番目の表現を分母に代入すると、等円半径は $r = abc/((a+b)(a+b+c))$ となる。



解法 G：相似を利用

三角形 O_1O_2I は三角形 ABC に相似であるから $O_1I : O_1O_2 = AC : AB$ すなわち $O_1I : 2r = b : c$ であるから $O_1I = 2br/c$ である。$AC = AD + DG + GC = AD + 2br/c + r$ であるから $AE = AD = b - 2br/c - r$ である。同様にして $BF = a - 2ar/c - r$ である。

これより

$$AB = c = AE + EF + EB = (b - 2br/c - r) + 2r + (a - 2ar/c - r) = a + b - 2(a+b)r/c$$

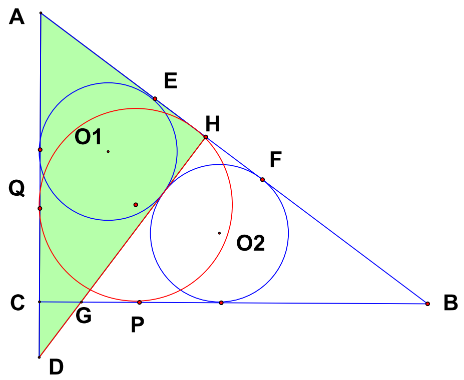
となり

$$r = \frac{c(a+b-c)}{2(a+b)},$$

分子と分母に $a+b+c$ を乗じると

$$r = \frac{abc}{(a+b)(a+b+c)}$$

が導出される。



解法 H：相似を利用

2 等円の接点を通る接線が三角形 ABC と交わる点を D,G,H とすると DH は AB に垂直である。三角形 ABC の内接円（半径 R）と辺 BC,CA との接点を P,Q とする。三角形 ADH は三角形 ABC に相似であるから $AE : EH = AQ : QC$ すなわち $AE : r = AQ : R$。レンマ 1 より $AQ = (b+c-a)/2$ を用いて $AE = (b+c-a)r/(2R)$ を得る。

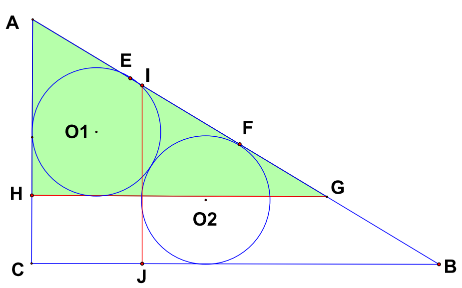
三角形 BHG は三角形 BCA に相似であるから同様にして $BF = (c+a-b)r/(2R)$ である。この 2 式を $AB = c = AE + EF + BF$ へ代入すると

$$(b+c-a)r/(2R) + 2r + (c+a-b)r/(2R) = c$$

となり, レンマ 2 の $R = (a+b-c)/2$ を用いて

$$r = \frac{c(a+b-c)}{2(a+b)} = \frac{abc}{(a+b)(a+b+c)}$$

が導出される。



解法 I：相似を利用

辺 BC に平行で円 O_1 に接する線分を GH, 辺 AC に平行で円 O_2 に接する線分を IJ とする。三角形 AGH、IBJ は合同で三角形 ABC に相似である。その相似比を α とおくと、$GH = a' = \alpha a, HA = b' = \alpha b, AG = c' = \alpha c$ である。

FB=EG であるから $AB = c = AE+EF+FB = AE+EG+EF = AG+EF = c'+2r$ である。r は直角三角形 AGH の内接円であるからレンマ 2 より $2r = a' + b' - c'$, これ

を前式へ代入すると $c = a' + b' = \alpha(a+b)$, 従って $\alpha = c/(a+b)$ となる。三角形 AGH と ABC の内接円 r, R の比は α であるからレンマ２を用いて

$$r = \alpha R = \frac{abc}{(a+b)(a+b+c)}$$

が導出される。

解法 J：解析幾何

座標原点を C,CB を x 軸、CA を y 軸、頂点 A,B の座標を $(0,b),(a,0)$、円 O_1, O_2 の中心座標を $(r,q_1),(p_2,r)$ とする。直線 AB の方程式は $bx + ay - ab$ であるから $O_1(r,q_1)$ から直線 AB までの距離は　　$r = -(br + aq_1 - ab)/c$

である。これより q_1 を求める：$q_1 = (ab - br - cr)/a.$ (21)

同様にして
$$p_2 = (ab - ar - cr)/b. \tag{22}$$

$O_1O_2 = \sqrt{(p2-r)^2 + (q_1-r)^2} = 2r$ に (21),(22) を代入して r についての方程式を求める：

$$c_2r^2 + c_1r + c_0 = 0, \tag{23}$$

$$c_2 = 2(a+b)(a^3+b^3+(a^2+b^2)c), c_1 = -2ab(a^2+b^2)(a+b+c), c_0 = a^2b^2(a^2+b^2).$$

２次方程式 (23) の判別式 D は $D = c_1^2 - 4c_2c_0 = 16a^4b^4c^2$ である。これより (23) の解は $r_- = (-c_1 - \sqrt{D})/(2c_2), r_+ = (-c_1 + \sqrt{D})/(2c_2$ である。恒等式 $((a+b)c + (a-b)^2)(a+b+c) = 2(a^3+b^3+(a^2+b^2)c)$ を利用すると r_-, r_+ は次のように変形できる：

$$r_- = \frac{abc((a+b)v + (a-b)^2)}{2(a+b)(a^3+b^3+(a^2+b^2)c)} = \frac{abv}{(a+b)(a+b+c)}, \tag{24}$$

$$r_+ = R + \frac{a^2b^2}{a^3+b^3+(a^2+b^2)c} > R, R = (a+b-c)/2. \tag{25}$$

ここで R は三角形 ABC の内接円半径である。r は R より小であるから r_+ は無縁根である。よって求める解は (24) である。