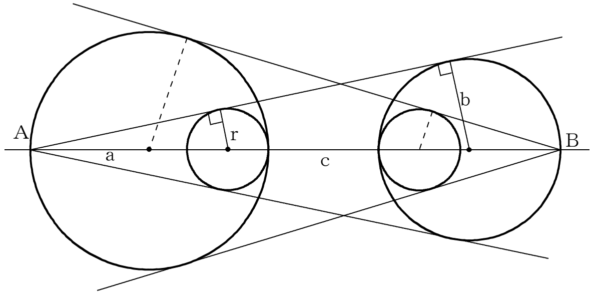
美しい和算幾何：和算史・解答篇

米山忠興

❶-１.△熱田神宮（円の接線と小円）



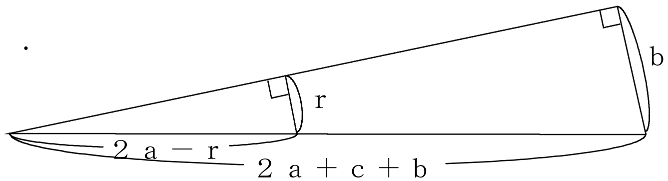
右の図の比例関係を用いると、

$$\frac{r}{2a-r}=\frac{b}{2a+b+c}$$

$$r(2a+b+c)=b(2a-r)$$

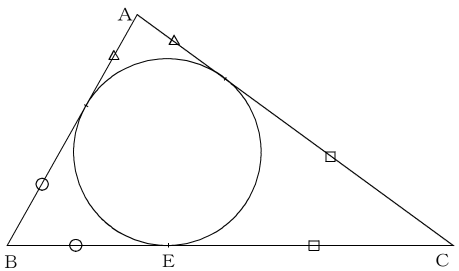
$$r(2a+2b+c)=2ab$$

$$r=\frac{2ab}{2a+2b+c}\ .$$



この式は、ａとｂで対称だから、Ｂ点からも同じ式が得られるはずである。

❶-２.◇小さな定理

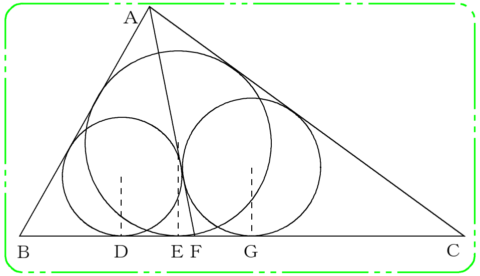


【解答】

例えば◿ＡＢＣとその内接円について、
右の図からも分かるように、

ＡＢ＋ＢＣ＝（△＋○）＋（○＋□）
　　　　　＝（△＋□）＋（○＋○）
　　　　　＝ＡＣ＋２ＢＥ

その他の三角形についても、同様の式が成り立つ。



$$\begin{aligned}
AB+BC&=AC+2BE\\
AC+CF&=AF+2CG\\
+)\ AF+2BD&=AB+BF\\
\hline
BC+CF+2BD&=2BE+2CG+BF\\
CF+BD&=BE+CG\\
BE-BD&=CF-CG\\
\therefore\quad DE&=FG\ .
\end{aligned}$$

❸-２.◇勾股側円

直角三角形と楕円の短径を与えて、長径を求めよ。

この問題は、會田筭左衛門安明の和算書『算法天生法指南巻之五』（文化七年刊）の第二問である。（図はプリント次頁）

楕円の長径・短径を２ｐｒ，２ｒとし、元の図を長径方向に１／ｐ倍すると、元の楕円は半径ｒの円になるはずである。

図２のように、もとの勾股弦をｃ，ａ，ｂとし、１／ｐ倍に縮尺したときをｃ，ａ’，ｂ’とする。

$$a=pa'$$

$$b'=a'+c-2r$$

また、

$$b'^2=a'^2+c^2=(a'+c-2r)^2$$

$$0=2a'c-4r(a'+c)+4r^2$$

$$a'(c-2r)=2r(c-r)$$

×ｐ：

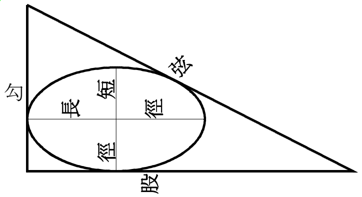
$$a'p(c-2r)=2pr(c-r)$$

$$2pr=\frac{a(c-2r)}{c-r}=\frac{a(c-2r)}{c-(2r)/2}$$

これは、術文：

$$長=\frac{股(勾-短)}{勾-短/2}$$

と一致している。



今有如圖勾股内容側圓只云勾一十五寸股二十寸側圓短徑五寸問側圓長徑幾何

図1

答曰側圓長徑一十六寸

術曰勾短徑差乗股以勾短徑半差除之得長徑合問

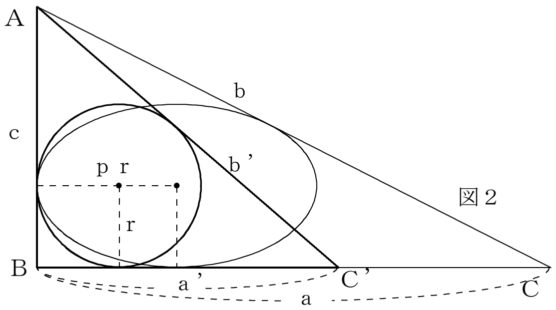
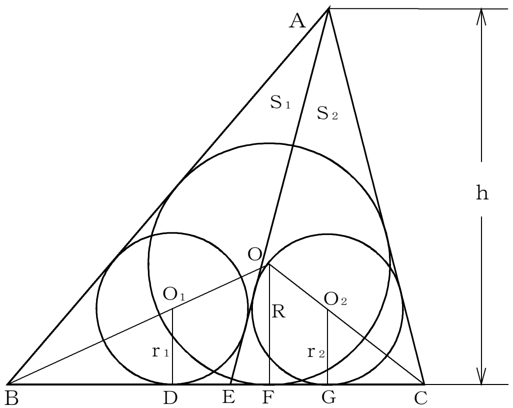


図2

❹-4．等円術（３）
★三斜等円（一般公式）

和算家が用いていた等円術の一般公式であり、かなり応用範囲が広いので、知っていると便利である。



S　：⊿ＡＢＣ
S_1　：⊿ＡＢＥ
S_2　：⊿ＡＥＣ
$S=S_1+S_2$

中勾：h
$2s=AB+BC+CA$とする。

$$\frac{r_1}{R}=\frac{BD}{BF},\qquad \frac{r_2}{R}=\frac{CG}{CF},$$

$$S=\frac{R}{2}\cdot 2s=Rs=\frac{h}{2}BC\ .$$

$$S_1=\frac{r_1}{2}(AB+BE+AE)$$

しかるに　$AE=AC+CE-2CG$

$$\therefore\quad S_1=\frac{r_1}{2}(AB+BE+AC+CE-2CG)$$
$$=\frac{r_1}{2}(2s-2CG)=r_1(s-CG)$$
$$=r_1 s-\frac{r_1 r_2}{R}CF\ .$$

同様に、
$$S_2=r_2 s-\frac{r_1 r_2}{R}BF\ .$$

よって　上の$S=S_1+S_2$から

$$Rs=\left(r_1 s-\frac{r_1 r_2}{R}CF\right)+\left(r_2 s-\frac{r_1 r_2}{R}BF\right)$$
$$=(r_1+r_2)s-\frac{r_1 r_2}{R}(CF+BF)$$
$$=(r_1+r_2)s-\frac{r_1 r_2}{R}BC$$
$$=(r_1+r_2)s-\frac{r_1 r_2}{R}\cdot Rs\cdot\frac{2}{h}$$

$$\times\frac{1}{s}:\quad R=r_1+r_2-r_1 r_2\cdot\frac{2}{h}$$

$$\times\frac{2}{h}:\quad \frac{2R}{h}=\frac{2r_1}{h}+\frac{2r_2}{h}-\frac{2r_1}{h}\cdot\frac{2r_2}{h}$$

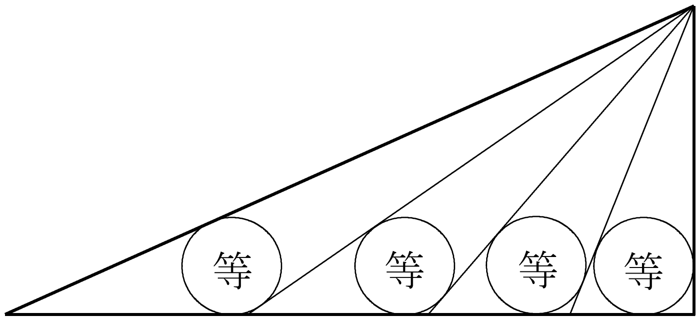
$$\therefore\quad \left(1-\frac{2R}{h}\right)=\left(1-\frac{2r_1}{h}\right)\left(1-\frac{2r_2}{h}\right)$$

この結果、三角形に内接する大円と、各々の小円の間には、三角形の高さ（中鉤）ｈ を用いて、上のような関係があることが分かった。

一般公式を求めた結果からは、小円径が等しい必要はなく、一般にもとの三角形と、それを界斜で隔てた部分の小三角形に内接する任意の半径の円に対して成り立つ公式であることが分かる。

【講評：この公式は西洋数学にはなく、和算家が発見した最も美しく、また、最も有用な公式の一つである。】

❹－５．等円術（４）◇三社権現



山口坎山『道中日記』
播州龍野三社権現　第六問
只云勾三十二寸玄二百
五十七寸問等円径
答曰等円径一十六寸
術曰置勾加玄半之乗勾
開平方加勾半之乗勾名乾
開平方名坤置勾自之以
減乾余開平方加勾内減
坤余得等円径合問
緒方義一
文化十二年乙亥年

（＊）現在の粒座天照（イイボニマス アマテラス）神社。
（解答）下の図において、全円、等円の半径をそれぞれＲ，ｒとする。
まず、殳$=\sqrt{257^2-32^2}=255$（寸）であり、

$$\frac{R}{2}(257+255+32)=\frac{1}{2}\times 255\times 32.$$

⇒　Ｒ＝１５．

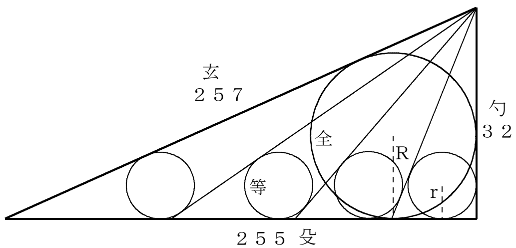
先の等円術の一般公式を使えば、

$$\left(1-\frac{2R}{h}\right)=\left(1-\frac{2r}{h}\right)^4$$

$$\left(1-\frac{2r}{32}\right)^4=1-\frac{2\times 15}{32}=\frac{1}{16}$$

$$1-\frac{2r}{32}=\frac{1}{2}$$

∴　２ｒ＝１６（寸）．



❹－６．等円術（４）〇三権現 術文について

術文は勾（勾）と玄から乾坤を求め、等円術の一般公式と同等の任意の勾殳玄に対する一般式を書いている。

$$\frac{\sqrt{\dfrac{勾+玄}{2}\cdot 勾}+勾}{2}\cdot 勾=乾,\quad \sqrt{乾}=坤,$$

$$\sqrt{乾-勾^2}+勾-坤=等,\ から$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\dfrac{勾+玄}{2}\cdot 勾}+勾}{2}\cdot 勾-勾^2}+勾-\sqrt{\frac{\sqrt{\dfrac{勾+玄}{2}\cdot 勾}+勾}{2}\cdot 勾}=等$$

以下では、上の術文の式がほんとうに解であるかどうかを確かめてみる。

$$1-\frac{等}{勾}=\sqrt{\frac{\sqrt{\dfrac{勾+玄}{2}\cdot 勾}+勾}{2勾}}-\sqrt{\frac{\sqrt{\dfrac{勾+玄}{2}\cdot 勾}+勾}{2勾}-1}$$

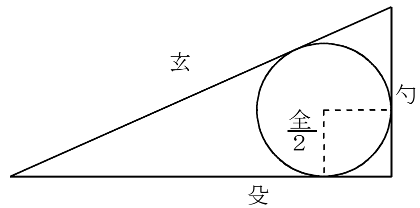
$$=\sqrt{\frac{\sqrt{\dfrac{勾+玄}{2勾}}+1}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{\dfrac{勾+玄}{2勾}}-1}{2}}$$

$$\left(1-\frac{等}{勾}\right)^2=\sqrt{\frac{勾+玄}{2勾}}-2\sqrt{\frac{\dfrac{勾+玄}{2勾}-1}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{勾+玄}{2勾}}-\sqrt{\frac{玄-勾}{2勾}}$$

$$\left(1-\frac{等}{勾}\right)^4=\frac{2玄}{2勾}-2\sqrt{\frac{玄^2-勾^2}{4勾^2}}$$

$$=\frac{玄}{勾}-\frac{殳}{勾}=\frac{勾-全}{勾}=1-\frac{全}{勾}\ .$$



となる。ただし、ここで　勾＋殳＝玄＋全 である。

❹-12. 等円術（９）★貫前神社

$$\left(1-\frac{\text{全}}{\text{勾}}\right)=\left(1-\frac{\text{甲}}{\text{勾}}\right)\left(1-\frac{\text{乙}}{\text{勾}}\right)\left(1-\frac{\text{丙}}{\text{勾}}\right)\left(1-\frac{\text{丁}}{\text{勾}}\right)\left(1-\frac{\text{戊}}{\text{勾}}\right)$$

$$=1-\frac{\text{甲}+\text{乙}+\text{丙}+\text{丁}+\text{戊}}{\text{勾}}+\frac{\text{甲乙}+\text{甲丙}+\cdots\cdots+\text{丁戊}}{\text{勾}^2}$$

$$-\frac{\text{甲乙丙}+\cdots\cdot+\text{丙丁戊}}{\text{勾}^3}+\frac{\text{甲乙丙丁}+\cdots\cdot+\text{乙丙丁戊}}{\text{勾}^4}-\frac{\text{甲乙丙丁戊}}{\text{勾}^5}$$

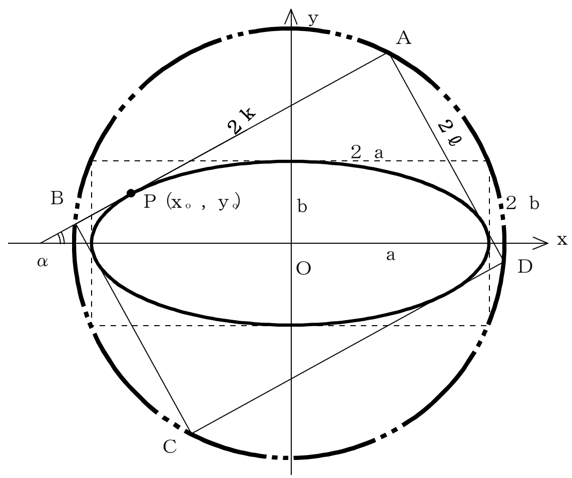
$$\text{全}=(\text{五径和})-\cfrac{(\text{二径})-\cfrac{(\text{三径})-\cfrac{(\text{四径})-\cfrac{(\text{五径連乗})}{\text{勾}}}{\text{勾}}}{\text{勾}}}{\text{勾}}$$

❹-13. 楕円と準円

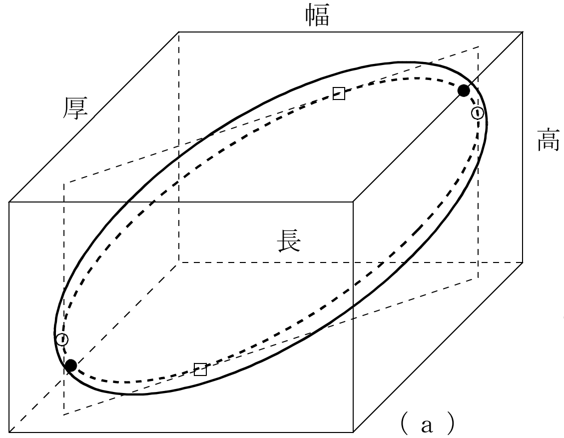
円周上の任意の一点から始めて、円に内接し楕円に外接する長方形が無数に描ける。

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

これが楕円の準円の方程式である。



❹-15. ◆長立円（３）

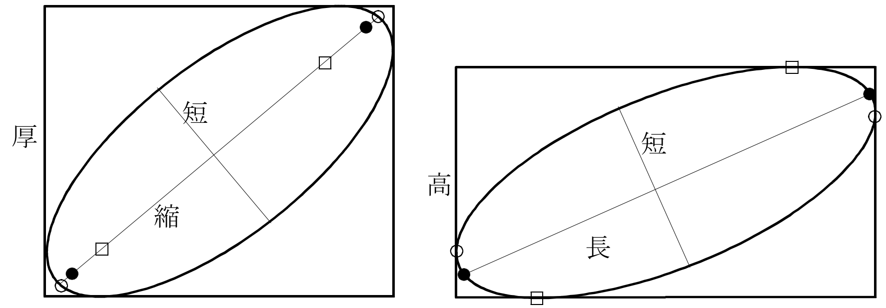


（ａ）

● 長径の両端

○ 縮長の両端

□ 上・下平面との接点　　［縮長］



（ｂ）　　（ｃ）

図（ａ）は鳥瞰図、（ｂ）は直方体の上方から見た図。長立円は、長方形内に楕円が斜めに容れられているように見える。その短径は長立円の短径に等しく、長径は長立円の長径より短かい。これを「縮長」と名づける。

図（ｃ）は長立円の長軸（長径）を含み、上・下平面に垂直に截った切り口の平面。長立円は、やはり長方形に楕円が斜めに容れられているように見える。ただし、この長方形のタテ線は楕円に接するようにとる。

$$\begin{array}{c}\text{縮}^2+\text{短}^2=\text{巾}^2+\text{厚}^2\\ \text{長}^2+\text{短}^2=\text{縮}^2+\text{高}^2\\ \hline \text{長}^2+2\,\text{短}^2=\text{巾}^2+\text{厚}^2+\text{高}^2\end{array}$$

よって、$\text{長}=\sqrt{\text{巾}^2+\text{厚}^2+\text{高}^2-2\,\text{短}^2}$ である。